Ultrametrik

Christian Semrau

05.11.2002

Inhaltsverzeichnis

1 Metrische Räume **1**
1.1 Definition der Metrik 1
1.2 Offene und abgeschlossene Mengen 2
1.3 Konvergenz 4

2 Topogie **5**
2.1 Definitionen 5
2.2 Zusammenhang zwischen Metrik und Topologie 6

3 Kompaktheit **7**
3.1 Definition 7
3.2 Eigenschaften kompakter Mengen 7

4 Eigenschaften von Ultrametriken **8**
4.1 Eigenschaften von Dreiecken und Kugeln 8
4.2 Konvergenz 8

1 Metrische Räume

1.1 Definition der Metrik

Definition 1.1.
1. Es bezeichne $\emptyset$ die leere Menge, $A \cup B$ die Vereinigung, $A \cap B$ den Durchschnitt, A^c das Komplement (in einer gegebenen Obermenge), $A \setminus B$ die Differenzmenge der Mengen A und B.

2. Es bezeichne $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen mit 0, $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ den Ring der ganzen Zahlen, $\mathbb{Q} := \left\{\frac{z}{n} : z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ den Körper der rationalen Zahlen, $\mathbb{R}$ den Körper der reellen Zahlen, $\mathbb{C} := \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ den Körper der komplexen Zahlen.

Definition 1.2. Sei M eine nichtleere Menge. Eine Abbildung $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik* auf M, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\text{(positive Definitheit)} \qquad \forall x, y \in M : d(x, y) \geq 0 \text{ und } (d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y) \qquad \text{(M1)}$$

$$\text{(Symmetrie)} \qquad \forall x, y \in M : d(x, y) = d(y, x) \qquad \text{(M2)}$$

$$\text{(Dreiecksungleichung)} \qquad \forall x, y, z \in M : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \qquad \text{(M3)}$$

Das Paar (M, d) heißt *metrischer Raum.* Erfüllt d zusätzlich die Verschärfung von (M3)

$$\text{(ultrametrische Eigenschaft)} \qquad \forall x, y, z \in M : d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\} \qquad \text{(M3}')$$

dann heißt d eine *Ultrametrik* und (M, d) ein *ultrametrischer Raum.*

Beispiel 1.1. Die Abbildung $d(x, y) = |x - y|$ ist eine Metrik auf $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ (und jeder nichtleeren Teilmenge davon), sie heißt *Betragsmetrik.*

Beispiel 1.2. Die Abbildung $d(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ ist eine Metrik auf $\mathbb{N}$.

Beispiel 1.3. Die Abbildung $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ ist eine Metrik auf jeder nichtleeren Menge, die sogenannte *diskrete Metrik* oder *triviale Metrik*. Eine Menge mit dieser Metrik heißt *diskreter metrischer Raum*.

Beispiel 1.4. In der Ebene $\mathbb{R}^2$ sind die Abbildungen
$d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$,
$d_2((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2}$,
$d_\infty((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ Metriken.

Definition 1.3. Sei (M,d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq T \subseteq M$. Der Wert

$$d(T) := \sup\{d(x,y) : x, y \in T\} \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$$

heißt *Durchmesser von* T. Man setzt noch $d(\emptyset) := 0$. Eine Teilmenge T mit $d(T) < \infty$ heißt *beschränkt*.

Bemerkung. Die Beschränktheit von T ist äquivalent dazu, dass es eine offene Kugel gibt, die T enthält.

1.2 Offene und abgeschlossene Mengen

Sei in diesem Abschnitt stets (M,d) ein metrischer Raum.

Definition 1.4. Sei $x \in M$ und $r > 0$. Die Menge

$$B_r(x) := \{z \in M : d(z,x) < r\} \tag{1.1}$$

heißt *offene Kugel mit Radius* r *um* x. Die Menge

$$\overline{B}_r(x) := \{z \in M : d(z,x) \leq r\} \tag{1.2}$$

heißt *abgeschlossene Kugel mit Radius* r *um* x.

Definition 1.5. Eine Teilmenge $U \subseteq M$ heißt *offen*, wenn

$$\forall x \in U \; \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq U. \tag{1.3}$$

Eine Teilmenge $V \subseteq M$ heißt *abgeschlossen*, wenn ihr *Komplement* V^c offen ist.

Definition 1.6. Sei $T \subseteq M$. Die Menge

$$\mathring{T} := \{x \in M : \exists \varepsilon > 0 \colon B_\varepsilon(x) \subseteq T\} \tag{1.4}$$

heißt das *Innere (oder der offene Kern) von* T. Die Menge

$$\overline{T} := \{x \in M : \forall \varepsilon > 0 \colon B_\varepsilon(x) \cap T \neq \emptyset\} \tag{1.5}$$

heißt der *Abschluss (oder die abgeschlossene Hülle) von* T. Die Menge

$$\partial T := \overline{T} \setminus \mathring{T} \tag{1.6}$$

heisst der *Rand von* T.

Lemma 1.1. *Es gilt:*

1. *Jede offene Kugel in* M *ist eine offene Menge.*
2. *Jede abgeschlossene Kugel in* M *ist eine abgeschlossene Menge.*
3. *Die leere Menge und* M *sind sowohl offen als auch abgeschlossen.*
4. *Das Innere einer Teilmenge* T *von* M *ist offen und* T *ist offen genau dann wenn* $\mathring{T} = T$.

5. *Der Abschluss einer Teilmenge T von M ist abgeschlossen und T ist abgeschlossen genau dann wenn $\overline{T} = T$.*

6. *Es ist $\mathring{T} \subseteq T \subseteq \overline{T}$ für jede Teilmenge T von M.*

7. *Es gilt für jedes $x \in M$ und $\varepsilon > 0$*

$$B_\varepsilon(x) \subseteq \overline{B_\varepsilon(x)} \subseteq \overline{B}_\varepsilon(x) \tag{1.7}$$

Beweis. 1. Sei $y \in B_r(x)$. Dann ist $d(y,x) < r$ und $\varepsilon := r - d(y,x) > 0$. Wir zeigen nun $B_\varepsilon(y) \subseteq B_r(x)$. Sei dazu $z \in B_\varepsilon(y)$. Dann ist $d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) \leq \varepsilon + d(y,x) = r$, also $z \in B_r(x)$.

2. Sei $y \in (\overline{B}_r(x))^c$. Dann ist $d(y,x) > r$ und $\varepsilon := d(y,x) - r > 0$. Wir zeigen nun $B_\varepsilon(y) \subseteq (\overline{B}_r(x))^c$. Sei dazu $z \in B_\varepsilon(y)$. Dann ist $d(z,x) \geq d(y,x) - d(y,z) \geq d(y,x) - \varepsilon = r$, also $z \in (\overline{B}_r(x))^c$.

3. Aus Definition 1.5 folgt direkt, dass die leere Menge offen ist (denn es gibt kein $x \in \emptyset$, für das die Bedingung fehlschlagen könnte). Daraus folgt dann die Abgeschlossenheit von M. Aus Definition 1.5 folgt auch, dass M offen ist (denn jede offene Kugel um einen Punkt aus M liegt ganz in M), und daraus die Abgeschlossenheit der leeren Menge.

4. Sei $T \subseteq M$ und $x \in \mathring{T}$, d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$ so dass $B_\varepsilon(x) \subseteq T$. Analog zu Punkt 1 findet man um jeden Punkt $y \in B_\varepsilon(x)$ eine offene Kugel mit Radius η, so dass $B_\eta(y) \subseteq B_\varepsilon(x) \subseteq T$. Damit liegt auch y in $\mathring{T}$, also $B_\varepsilon(x) \subseteq \mathring{T}$. Dass T offen ist, genau dann wenn $\mathring{T} = T$, ist klar nach Definition.

5. ...

6. ...

7. ...

□

Bemerkung. 1. Durch Einsetzen der Definitionen (1.5) und (1.4) in (1.6) erhält man

$$\partial T = \{x \in M : \forall \varepsilon > 0 \colon B_\varepsilon(x) \cap T \neq \emptyset \text{ und } B_\varepsilon(x) \cap (T^c) \neq \emptyset\} \tag{1.8}$$

2. Es ist bei beiden Inklusionen in Gleichung (1.7) in Lemma 1.1 Ungleichheit möglich! Das heißt, es kann sein, dass der Abschluss der offenen Kugel eine echte Teilmenge der abgeschlossenen Kugel ist. Es ist aber auch möglich, dass die abgeschlossene Kugel mit der offenen Kugel übereinstimmt: $B_\varepsilon(x) = \overline{B}_\varepsilon(x)$. Man betrachte zum Beispiel offene und abgeschlossene Kugeln mit Radius 1 bzw. Radius $\frac{1}{2}$ in einem diskreten metrischen Raum. Es gibt auch nichttriviale Beispiele, zu denen wir noch kommen werden.

Satz 1.2. *1. Sei $(A_i)_{i \in I} \subset M$ eine Familie offener Mengen. Dann ist $\bigcup_{i \in I} A_i$ ebenfalls offen.*

2. Sei $(A_i)_{i \in I} \subset M$ eine Familie abgeschlossener Mengen. Dann ist $\bigcap_{i \in I} A_i$ ebenfalls abgeschlossen.

3. Seien $A, B \subseteq M$ offen. Dann ist $A \cap B$ offen.

4. Seien $A, B \subseteq M$ abgeschlossen. Dann ist $A \cup B$ abgeschlossen.

Beweis. 1. Sei $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Dann gibt es ein $i \in I$ so dass $x \in A_i$. Es gibt dann ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

2. $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} (A_i)^c$ ist offen nach Punkt 1.

3. Sei $x \in A \cap B$, dann gibt es $\alpha, \beta > 0$ mit $B_\alpha(x) \subseteq A$, $B_\beta(x) \subseteq B$. Setze $\varepsilon := \min\{\alpha, \beta\}$, dann ist $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

4. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ ist offen nach Punkt 3.

□

Satz 1.3. *Ist (M,d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq T \subseteq M$, dann ist mit $\widetilde{d} := d|_T$ auch $(T,\widetilde{d})$ ein metrischer Raum. Eine Menge $A \subseteq T$ ist offen in T genau dann, wenn es eine in M offene Menge $B \subseteq M$ gibt, so dass $B \cap T = A$.*

Beweis. Man sieht sofort, dass die Bedingungen (M1), (M2) und (M3) von $\widetilde{d}$ auf T erfüllt werden, damit ist die erste Behauptung klar.

Sei $x \in T$ und $r > 0$. Sei $\widetilde{B}_r(x)$ die offene Kugel um x mit Radius r in T und $B_r(x)$ die offene Kugel um x mit Radius r in M, dann gilt:

$$\widetilde{B}_r(x) = \{y \in T : d(y,x) < r\} = \{y \in M : d(y,x) < r\} \cap T = B_r(x) \cap T$$

Sei $A \subseteq T$ offen in T, d.h. zu jedem $x \in A$ gibt es ein $r(x) > 0$ so dass die in T offene Kugel $\widetilde{B}_{r(x)}(x) \subseteq T$ ganz in A liegt. Es ist $\widetilde{B}_{r(x)}(x) = B_{r(x)}(x) \cap T$ für jedes $x \in A$ und

$$A = \bigcup_{x \in A} \widetilde{B}_{r(x)}(x) = \bigcup_{x \in A} \left(B_{r(x)}(x) \cap T\right) = \left(\bigcup_{x \in A} B_{r(x)}(x)\right) \cap T = B \cap T,$$

wobei $B := \bigcup_{x \in A} B_{r(x)}(x)$ offen in M ist.

Sei nun $A = B \cap T$ mit einer in M offenen Menge $B \subseteq M$. Um jedes $x \in A$ gibt es eine in M offene Kugel $B_r(x) \subseteq M$ die ganz in B liegt. $\widetilde{B}_r(x) := B_r(x) \cap T$ ist eine in T offene Kugel um x, die ganz in A liegt, also ist A offen in T. □

1.3 Konvergenz

Bezeichne (M,d) weiterhin einen metrischen Raum.

Definition 1.7. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ eine Folge und $x \in M$. Wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für jedes $n \geq N$ gilt $d(x_n, x) < \varepsilon$, dann sagt man, die Folge (x_n) *konvergiert* gegen x. Schreibweise: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. Die Folge (x_n) heißt *konvergent*, x heißt der *Grenzwert* der Folge. Eine Folge in einer additiven Gruppe (z.B. der eines Körpers) , die gegen 0 konvergiert, heißt *Nullfolge*.

Definition 1.8. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ eine Folge in M. Wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für jedes $m > n \geq N$ gilt $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, dann heißt die Folge (x_n) eine *Cauchy-Folge*.

Lemma 1.4. *Jede konvergente Folge ist Cauchy-Folge.*

Beweis. … □

Definition 1.9. Ein metrischer Raum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, heißt *vollständiger metrischer Raum*.

Beispiel 1.5. Die Folge $(n) \subset \mathbb{N}$ ist bezüglich der in Beispiel 1.2 definierten Metrik eine Cauchy-Folge, aber nicht konvergent. Bezüglich der Betragsmetrik ist $(n) \subset \mathbb{N}$ keine Cauchy-Folge.

Beispiel 1.6. Die Folge $(\frac{1}{n}) \subset \mathbb{R}$ ist bezüglich der Betragsmetrik eine Nullfolge.

Beispiel 1.7. Bezüglich der trivialen Metrik ist eine Folge (x_n) genau dann eine Cauchy-Folge, wenn sie *irgendwann stationär wird*, d.h. wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $x_n = x_{n+1}$. Genau dann ist sie auch konvergent.

Beispiel 1.8. $\mathbb{R}$ ist bzgl. der Betragsmetrik vollständig.

Beispiel 1.9. Jeder Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist vollständig bezüglich der *euklidischen Metrik* $d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$

2 Topogie

2.1 Definitionen

Definition 2.1. Sei M eine nichtleere Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(M)$ heißt *Topologie auf M*, wenn

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$, $M \in \mathcal{T}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{T} \colon A \cap B \in \mathcal{T}$
3. Für jede Familie $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ gilt $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$

Das Paar $(M, \mathcal{T})$ heißt *topologischer Raum*. Die Mengen $T \in \mathcal{T}$ heißen *offen*, die Teilmengen $T \subseteq M$ mit $T^c \in \mathcal{T}$ heißen *abgeschlossen*.

Beispiel 2.1.
1. Für jede nichtleere Menge M ist $\mathcal{T} = \{\emptyset, M\}$ eine Topologie.
2. Für jede nichtleere Menge M ist $\mathcal{T} = \mathcal{P}(M)$ eine Topologie. Sie heißt die *diskrete Topologie auf M*.

Definition 2.2. Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Sei $x \in M$. Eine offene Menge $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O$ heißt *offene Umgebung von x*. Eine Menge $U \subseteq M$, die eine offene Umgebung von x enthält, heißt *Umgebung von x*.

Definition 2.3. Der topogische Raum $(M, \mathcal{T})$ heißt *hausdorffsch* oder *punktetrennend*, wenn zu je zwei verschiedenen Punkten $x \neq y \in M$ Umgebungen $U \ni x$, $V \ni y$ existieren mit $U \cap V = \emptyset$.

Definition 2.4. Sei $(M, \mathcal{T})$ ein hausdorffscher topologischer Raum. Sei $(x_n) \subset M$ eine Folge. Wenn für $x \in M$ in jeder Umgebung $U \ni x$ unendlich viele Folgeglieder x_n liegen, dann heißt x ein *Häufungswert* der Folge (x_n).

Definition 2.5. Sei $(M, \mathcal{T})$ ein hausdorffscher topologischer Raum. Sei $A \subset M$ eine Teilmenge. Wenn für $x \in M$ in jeder Umgebung $U \ni x$ mindestens ein von x verschiedenes Element $x \in X$ liegt, dann heißt x ein *Häufungspunkt* der Menge T.

Definition 2.6. Sei $(M, \mathcal{T})$ ein hausdorffscher topologischer Raum. Sei $A \subset M$ eine Teilmenge. Wenn für $x \in M$ in jeder Umgebung $U \ni x$ mindestens ein Element $x \in X$ liegt, dann heißt x ein *Berührungspunkt* der Menge T.

Bemerkung. Ein Häufungswert x einer Folge (x_n) muss nicht Häufungspunkt der Menge $\{x_n\}$ sein. Z.B. ist das so bei konstanten Folgen. Jedoch ist jeder Häufungspunkt von $\{x_n\}$ ein Häufungswert von (x_n). Jeder Häufungspunkt einer Menge ist auch Berührungspunkt der Menge.

Definition 2.7. Sei $(M, \mathcal{T})$ ein hausdorffscher topologischer Raum. Sei $(x_n) \subset M$ eine Folge. Wenn es ein $x \in M$ gibt, so dass für jede Umgebung $U \ni x$ gilt, dass nur endlich viele Folgeglieder x_n außerhalb von U liegen, dann heißt die Folge (x_n) *konvergent* und x ihr *Grenzwert*. Man sagt, (x_n) *konvergiert gegen x*. Schreibweise: $x_n \longrightarrow x$.

Lemma 2.1. *Sei $(M, \mathcal{T})$ ein hausdorffscher topologischer Raum. Wenn die Folge $(x_n) \subset M$ konvergiert, dann hat sie genau einen Häufungswert, nämlich ihren Grenzwert.*

Beweis. Sei x der Grenzwert von (x_n). Da außerhalb jeder Umgebung von x nur endlich viele Folgeglieder liegen, müssen in jeder Umgebung von x unendlich viele Folgeglieder liegen, damit ist x ein Häufungswert der Folge. Sei $x \neq y \in M$. Dann gibt es disjunkte Umgebungen $U \ni x$ und $V \ni y$. In V liegen nur noch endlich viele Folgeglieder, damit ist y kein Häufungswert der Folge. $\square$

Bemerkung. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht, denn die Folge $(0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \ldots) \subset \mathbb{R}$ hat genau einen Häufungswert, aber konvergiert nicht. (Dass $\mathbb{R}$ ein haussdorffscher topologischer Raum ist, folgt aus der Bemerkung zu Lemma 2.2.)

2.2 Zusammenhang zwischen Metrik und Topologie

Lemma 2.2. *Für jeden metrischen Raum (M, d) ist das System der offenen Mengen bezüglich d eine Topologie auf M.*

Beweis. $\emptyset$ und M sind offen. Nach Satz 1.2 ist die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen offen und der Schnitt von zwei offenen Mengen offen. Damit bilden die offenen Mengen eine Topologie. □

Definition 2.8. Das System der bzgl. d offenen Mengen heißt die *von d erzeugte Topologie.*

Bemerkung. Jede von einer Metrik erzeugte Topologie ist hausdorffsch. Denn sind $x \neq y \in M$, dann ist $r := d(x, y)/2 > 0$, und die offenen Kugeln $B_r(x)$, $B_r(y)$ sind disjunkt.

Satz 2.3. *Sei M eine nichtleere Menge mit einer Metrik d und einer Topologie $\mathcal{T}$. Die Topologie $\mathcal{T}$ wird von d erzeugt, genau dann wenn jede offene Kugel in $\mathcal{T}$ liegt und jede offene Umgebung eines jeden Punktes $x \in M$ eine offene Kugel um x enthält.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Diese Richtung ist klar.

„$\Leftarrow$“: Zu zeigen ist, dass jede Menge in $\mathcal{T}$ offen bzgl. d ist, und dass jede offene Menge bzgl. d in $\mathcal{T}$ liegt.

Sei A offen bzgl. d. Ist $A = \emptyset$, dann ist $A \in \mathcal{T}$. Andernfalls gibt es um jedes $x \in A$ eine offene Kugel $B(x)$, die in A liegt. Damit ist $A = \bigcup_{x \in A} B(x)$. Jedes $B(x)$ liegt nach Vor. in $\mathcal{T}$, damit liegt auch A in $\mathcal{T}$.

Sei nun $A \in \mathcal{T}$. Falls $A = \emptyset$, ist A offen. Andernfalls sei $x \in A$ beliebig. Dann ist A eine offene Umgebung von x, und nach Vor. gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x) \subseteq A$. Damit ist A offen. □

Beispiel 2.2. Die diskrete Topologie auf M wird erzeugt von der diskreten Metrik auf M, denn jede Teilmenge von M liegt in der Topologie, und jede offene Umgebung eines Punktes x enthält die offene Kugel $B_{1/2}(x) = \{x\}$.

Lemma 2.4. *Dine Folge (x_n) konvergiert bzgl. der Metrik d gegen x genau dann, wenn sie bzgl. der Topologie gegen x konvergiert.*

Lemma 2.5. *Jede Cauchyfolge (x_n) in einem metrischen Raum (M, d) hat höchstens einen Häufungswert.*

Beweis. Angenommen, $a, b \in M$ wären zwei verschiedene Häufungswerte von (x_n). Setze $r := d(x, y)/3$. Dann liegen in $B_r(x)$ und in $B_r(y)$ jeweils unendlich viele Folgeglieder. Für □

3 Kompaktheit

3.1 Definition

Definition 3.1. Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $T \subseteq M$. Eine Familie $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ offener Mengen (mit beliebiger Indexmenge I) heißt *offene Überdeckung von* T, wenn $T \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

Definition 3.2. Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $T \subseteq M$. Wenn es zu jeder offenen Überdeckung $(A_i)_{i \in I}$ von T eine endliche Teilüberdeckung $(A_i)_{i \in J}$, $J \subseteq I$, $|J| < \infty$ gibt, dann heißt T *kompakt*.

Beispiel 3.1. In $\mathbb{R}$ mit der Betragsmetrik (s. Beispiel 1.1 auf Seite 1) sind genau die beschränkten abgeschlossenen Mengen kompakt.

Beispiel 3.2. Jeder endliche topologische Raum ist kompakt.

3.2 Eigenschaften kompakter Mengen

Satz 3.1. *Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Sei $K \subseteq M$ kompakt. Dann ist K abgeschlossen und jede abgeschlossene Teilmenge T von K ist kompakt.*

Beweis. … □

Satz 3.2. *Sei (M, d) ein metrischer Raum. Sei $K \subseteq M$ kompakt. Dann ist K beschränkt und abgeschlossen.*

Beweis. … □

Satz 3.3. *Sei (M, d) ein metrischer Raum. Sei $K \subseteq M$ kompakt. Dann ist K vollständig.*

Beweis. … □

4 Eigenschaften von Ultrametriken

Sei in diesem Abschnitt stets (M, d) ein ultrametrischer Raum.

4.1 Eigenschaften von Dreiecken und Kugeln

Lemma 4.1. *Seien $x, y, z \in M$. Ist $d(x, y) \neq d(y, z)$, dann ist $d(x, z) = \max\{d(x, y), d(y, z)\}$. Ist $d(x, y) < d(y, z)$, dann ist $d(x, z) = d(y, z)$.*

Beweis. Sei $d(x, y) < d(y, z)$. Dann ist $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\} = d(y, z)$. Weiter ist $d(y, z) \leq \max\{d(x, y), d(x, z)\} \leq d(y, z)$. Damit haben wir $d(y, z) = \max\{d(x, y), d(x, z)\}$ und wegen $d(x, y) < d(y, z)$ ist $d(y, z) = d(x, z)$. □

Satz 4.2. *Jedes Dreieck in M ist gleichseitig oder gleichschenklig mit kürzerer Basis.*

Beweis. Seien $x, y, z \in M$ die Ecken und $a = d(x, y)$, $b = d(y, z)$, $c = d(z, x)$ die Seitenlängen des Dreiecks. Falls $a = b = c$, ist das Dreieck gleichseitig. Falls zwei Seiten ungleich lang sind, o.E. $a < b$, dann ist $c = \max\{a, b\} = b$ nach Lemma 4.1 und das Dreieck hat die gleich langen Seiten b und c und die Seite a ist kürzer. □

Satz 4.3. *Sei $x \in M$, $r > 0$. Dann gilt:*

1. *Für jedes $y \in B_r(x)$ ist $B_r(y) = B_r(x)$, d.h. jeder Punkt in einer offenen Kugel ist Mittelpunkt dieser Kugel.*
2. *Für jedes $y \in \overline{B}_r(x)$ ist $\overline{B}_r(y) = \overline{B}_r(x)$.*
3. *Die offene Kugel $B_r(x)$ ist auch abgeschlossen.*
4. *Die abgeschlossene Kugel $\overline{B}_r(x)$ ist auch offen.*

Beweis.

1. Sei $y \in B_r(x)$ fest gewählt. Für jedes $z \in B_r(x)$ gilt $d(z, y) \leq \max\{d(y, x), d(x, z)\} < r$, und für jedes $z \in B_r(y)$ gilt $d(z, x) \leq \max\{d(z, y), d(y, z)\} < r$. Damit ist $B_r(x) = B_r(y)$ gezeigt.
2. Sei $y \in \overline{B}_r(x)$ fest gewählt. Für jedes $z \in \overline{B}_r(x)$ gilt $d(z, y) \leq \max\{d(y, x), d(x, z)\} \leq r$, und für jedes $z \in \overline{B}_r(y)$ gilt $d(z, x) \leq \max\{d(z, y), d(y, z)\} \leq r$. Damit ist $\overline{B}_r(x) = \overline{B}_r(y)$ gezeigt.
3. Sei $y \in (B_r(x))^c$. Für alle $z \in B_r(x)$ gilt $d(x, y) \geq r > d(x, z)$, und deshalb nach Lemma 4.1 $d(y, z) = d(x, y) \geq r$. Damit ist $z \notin B_r(y)$, also $B_r(y) \cap B_r(x) = \emptyset$.
4. Sei $y \in \overline{B}_r(x)$. Dann ist $B_r(y) \subseteq \overline{B}_r(y) = \overline{B}_r(x)$ eine offene Kugel um y.

□

Bemerkung. Es ist nicht unbedingt $\overline{B}_r(x) = B_r(x)$, aber es gibt stets ein $s \geq r$, so dass $\overline{B}_r(x) = B_s(x)$.

4.2 Konvergenz

Lemma 4.4. *Sei $(x_n) \subset M$ eine Folge, mit $d(x_{n+1}, x_n) \longrightarrow 0$. Dann ist (x_n) eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt nun ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_{n+1}, x_n) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Dann gilt für alle $m > n \geq N$

$$d(x_m, x_n) \leq \max\{d(x_m, x_{m-1}), \ldots, d(x_{n+1}, x_n)\} < \varepsilon$$

□