Christian Semrau, Alexandra Merz

Probeklausur MPIB WS02
21.01.2003

1. Seien $A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^{3,3}$.
   Bestimmen Sie die Produkte AB und BA.
2. Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ in $(\mathbb{F}_2)^{3,3}$.
   Bestimmen Sie die Produkte AB und BA.
3. Sei $V := \mathbb{R}^{2,2}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$ und $M := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in V$.
   Sei $\varphi\colon V \to V$, $\varphi(A) := AM - MA$.
   (a) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von V.
   (b) Zeigen Sie, dass φ ein Homomorphismus ist.
   (c) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des Kerns von φ. (Der Kern von φ ist definiert als $\mathrm{Ke}(\varphi) := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$, er ist ein Untervektorraum von V.)
4. Definieren Sie die Begriffe *Untervektorraum* und *Erzeugendensystem*.
5. Sei $V := \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $U := \{f \in V | f(0) = 0\}$.
   (a) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.
   (b) Sei $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(f) = f(1)$. Zeigen Sie, dass φ ein VR-Homomorphismus ist.
   (c) [freiwillige Zusatzaufgabe] Finden Sie eine Darstellung des Kerns von φ (nicht durch Angabe einer Basis!).
6. Sei $f\colon V \to W$ ein surjektiver VR-Homomorphismus, U der Kern von f und $g\colon V/U \to W$, $g(\overline{v}) := f(v)$. Zeigen Sie, dass g wohldefiniert ist (also $\overline{v_1} = \overline{v_2} \Rightarrow f(v_1) = f(v_2)$) und ein VR-Isomorphismus ist.